Liceo scientifico statale "G. B. Quadri"

a. s. 2017/2018

Simulazione della seconda prova scritta – Matematica – 11 maggio 2018

Candidato	___________________________________	Classe 5^	__________

Il candidato svolga, a proprio piacimento, uno dei due problemi e cinque e dei dieci quesiti proposti. Dichiari, poi, le proprie scelte nella tabella sottostante:

PROBLEMA 1	PROBLEMA 2	QUESITO 1	QUESITO 2	QUESITO 3	QUESITO 4	QUESITO 5	QUESITO 6	QUESITO 7	QUESITO 8	QUESITO 9	QUESITO 10

AVVERTENZA È vietato usare: bianchetto; inchiostri cancellabili; penne o matite che scrivano rosso.

PROBLEMA 1 Un'azienda dolciaria intende introdurre sul mercato uova pasquali di cioccolato. Lo studio tecnico viene incaricato di progettare un adeguato stampo per la produzione delle uova. La forma dell'uovo è ottenuta come solido di rotazione intorno all'asse y della curva piana ω, simmetrica rispetto all'asse y e rappresentata in figura in un piano cartesiano Oxy (figura a).

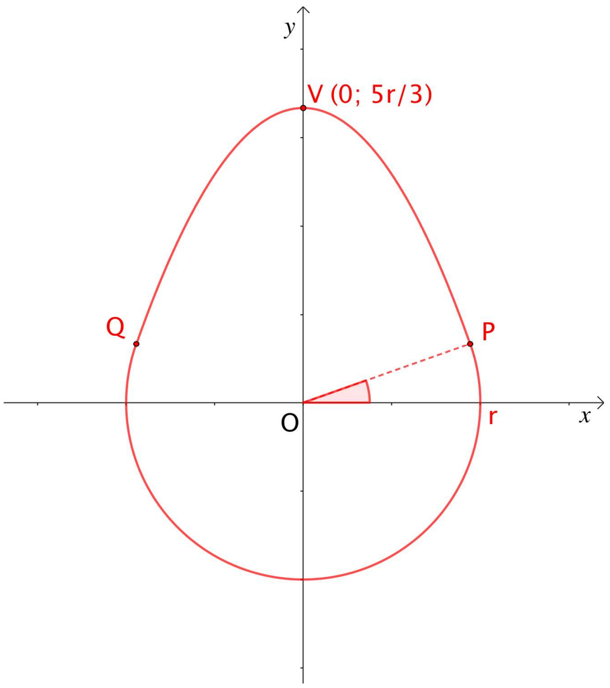

Figura a

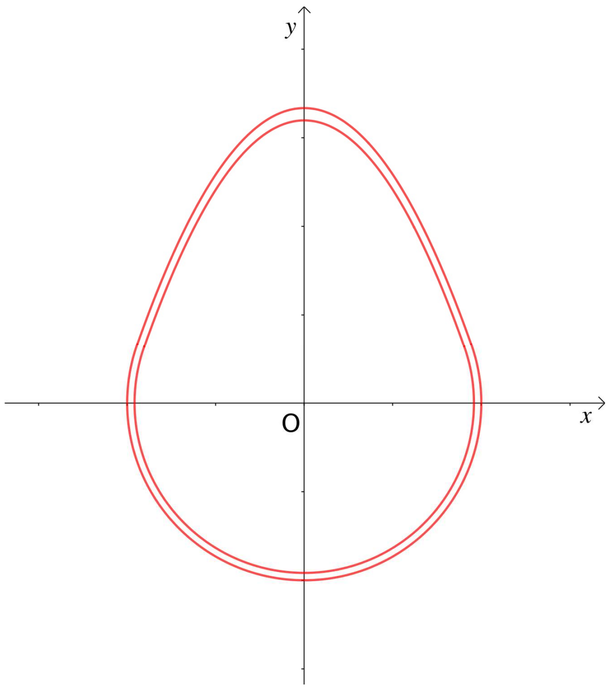

Figura b

Si tratta di una curva costituita dall'arco QP di circonferenza di raggio r e dall'arco QP di parabola con il vertice in $V\left(0;\frac{5}{3}r\right)$. Sia l'arco di parabola sia l'arco di circonferenza sono posizionati in modo tale da non formare punti angolosi nei punti di raccordo P e Q.

a) In base ai dati forniti, ricava l'equazione della parabola e della circonferenza che soddisfano le richieste.

b) Trova le coordinate dei punti P e Q e il valore dell'angolo α, in gradi sessadecimali, formato dal segmento PO e dalla semiretta Ox.

c) Si vuole realizzare un uovo con le caratteristiche sopra indicate. Il volume occupato dal cioccolato sarà lo spazio compreso tra i solidi di rotazione attorno all'asse y della curva ω, con $r = 12\ cm$, e un'altra curva simile ω′, con $r' = 11{,}5\ cm$ (figura b). Calcola, in cm^3, la quantità di cioccolato necessaria per produrre un singolo uovo.

d) L'uovo verrà confezionato in una scatola di cartone che ha la forma di un tronco di cono, come nella figura c; la superficie laterale risulta tangente alla circonferenza nei punti P e Q e le basi sono perpendicolari all'asse y. Calcola il rapporto tra l'area $\mathcal{A}_1$ della base inferiore e l'area $\mathcal{A}_2$ della base superiore della scatola.

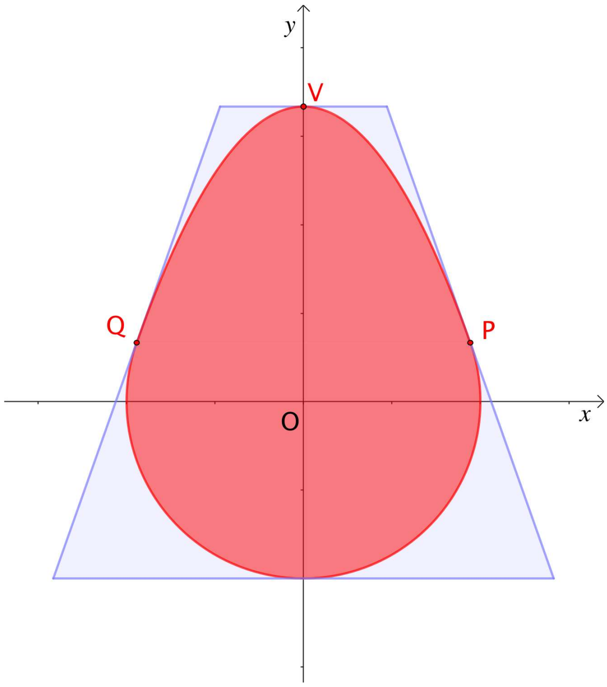

Figura c

PROBLEMA 2 E' data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 - 2a\ln x & se\ \ x \in]0;1[\\ 2 - x - e^{1-x} & se\ \ x \in [1;+\infty[\end{cases}$$

ove a è parametro reale positivo.

a) Dimostrare che la funzione f è non negativa nell'intervallo $]0;1[$ se, e solo se $a \geq 1/2$.

b) Determinare il valore di a affinché risulti

$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

Studiare, per il valore di a trovato, la funzione f (*continuità; limiti nei punti di frontiera; derivabilità; crescenza/decrescenza; convessità; punti estremi e punti di flesso*). Tracciare il grafico Γ di f, rappresentando accuratamente eventuali punti critici e gli andamenti asintotici.

c) Scrivere l'espressione analitica della famiglia delle primitive della funzione f studiata al punto precedente (*facendo attenzione alla suddivisione in casi della stessa*). Far vedere che le suddette primitive si possono estendere in modo continuo nell'origine indicando espressamente le modalità di una tale estensione.

d) Calcolare l'area della regione Δ così definita:

$$\Delta: \begin{cases} y \leq 0 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq f(x) \end{cases}$$

e il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di Δ attorno all'asse y.

QUESITO 1 Tra tutti i coni di apotema a, determinare quello di volume massimo.

QUESITO 2 Si sceglie un'urna fra tre gettando contemporaneamente cinque monete (regolari). Se la differenza (in valore assoluto) tra il numero di teste e il numero di croci è uno, si sceglie la prima urna; se la differenza è tre, si sceglie la seconda urna; se la differenza è cinque, si sceglie la terza urna. La prima urna contiene tre palline, numerate da -1 a 1; la seconda cinque palline, numerate da -2 a 2; la terza sei palline, numerate da -2 a 3. Si estraggono consecutivamente due palline (senza reimmissione). Sapendo che la somma dei numeri sulle palline estratte è zero, si calcoli la probabilità che l'urna scelta sia rispettivamente la prima, la seconda, la terza.

QUESITO 3 Dimostrare che la funzione $f(x) = x^3 + \sqrt{x-1}$ è invertibile e calcolare la derivata di $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 9$.

QUESITO 4 Dopo aver determinato l'equazione vettoriale della retta r passante per i punti $P(1;5;-2)$ e $Q(5;5;0)$, si trovino le intersezioni di r con la superficie sferica Σ: $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z+5=0$ e si ricavino le equazioni cartesiane dei piani tangenti a Σ nei punti d'intersezione.

QUESITO 5 Studiare l'andamento (crescenza/decrescenza) della funzione

$$f(x)=\int_{e^x}^{e^{2x}} t^2|ln\,t|\,dt$$

e individuare eventuali massimi e minimi.

QUESITO 6 Enunciare il teorema della media (integrale). Stabilire se le ipotesi di tale teorema valgono, o meno, per la funzione

$$\begin{array}{rccl} f: & [0;3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} -3x+3 & se\ \ x\in[0;1] \\ -x^2+4x-3 & se\ \ x\in\,]1;3] \end{cases} \end{array}$$

Determinare, se ve ne sono, i punti x del dominio di f tali che si abbia

$$f(x)=\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt$$

QUESITO 7 Dimostrare che l'equazione $xlnx-1=0$ ammette una sola soluzione reale e calcolare tale soluzione con un errore non superiore a 0,05.

QUESITO 8 In una piramide regolare a base pentagonale l'apotema è congruente al lato di base. Determinare l'ampiezza dell'angolo diedro (interno alla piramide) formato da due facce laterali contigue. Esprimere la risposta in gradi sessa decimali e scrivere il risultato approssimato al centesimo di grado.

QUESITO 9 Il solido Σ ha per base il triangolo equilatero ABC, il cui lato misura $2\sqrt{3}\,cm$. Le sezioni del solido, ottenute con piani ortogonali ad ABC e paralleli a BC, sono segmenti di parabola, simmetrici rispetto all'asse di simmetria di questa e tali che la distanza tra il vertice e la corda sia pari alla lunghezza della corda. Calcolare il volume di Σ.

QUESITO 10 Risolvere il seguente problema di Cauchy per la funzione $y(x)$ e calcolare $y'(\sqrt{3})$:

$$\begin{cases} yx=y'\sqrt{x^2+1} \\ y(0)=1 \end{cases}$$