Problema 1

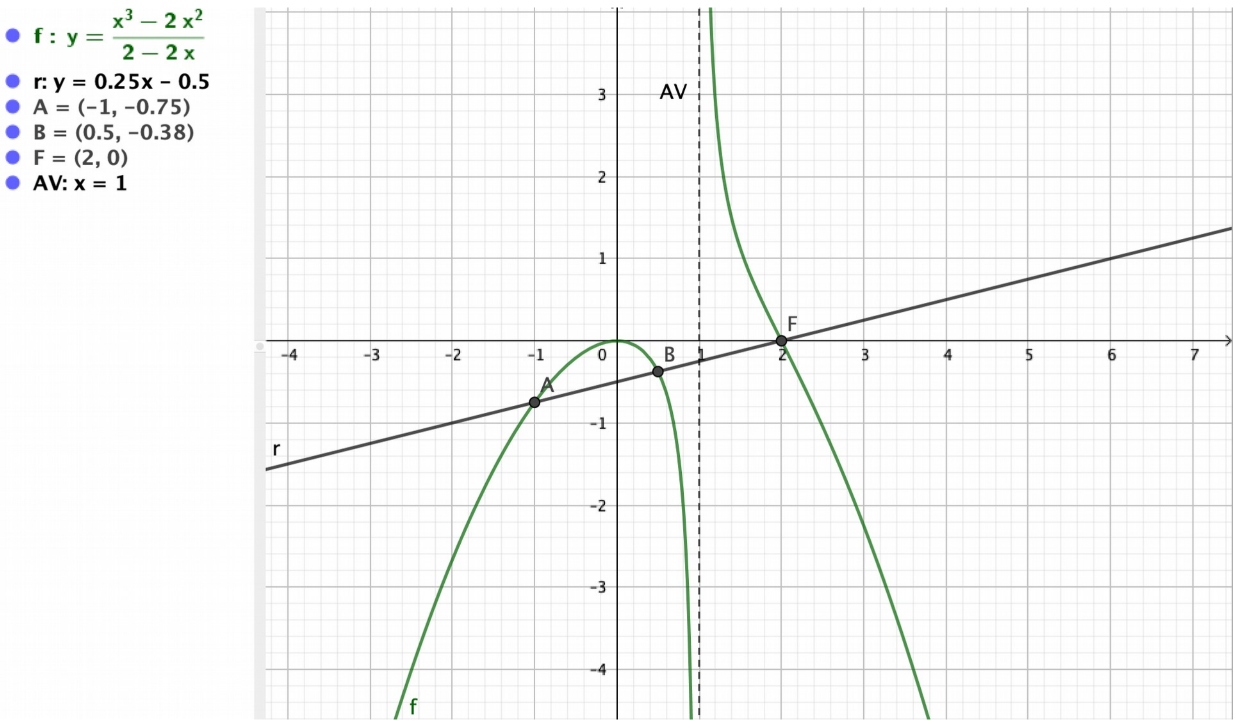
a) Equazione della parabola Γ: $y=-1/2\,x^2+1/2\,x$

b) Equazione della parabola Λ: $y=\frac{\lambda-1}{2\lambda}x^2+(1-\lambda)x$;

Coordinate del Fuoco di Q : $F=\left(\lambda,\frac{-\lambda^3+2\lambda}{2\lambda-2}\right)$

c,d) Grafico di della curva S, della retta r, la cui equazione è $y=1/4\,x-1/2$; il flesso è il punto F(2,0); i punti A e B hanno ascissa “facile”, ossia -1 e $\frac{1}{2}$ e per trovarle si imposta un sistema di terzo grado tra S e r, ma in cui bisogna sfruttare le due intersezioni note, ossia A e F.

L’integrale definito, quasi immediato dopo aver diviso il polinomio, dovrebbe dare come soluzione il valore $\frac{39}{32}-\ln 2$



Soluzione

1 - $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$ base $= \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha$

altezza $= 2 \operatorname{sen}\alpha$

$$f(\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$f'(\alpha) = 2(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)$$

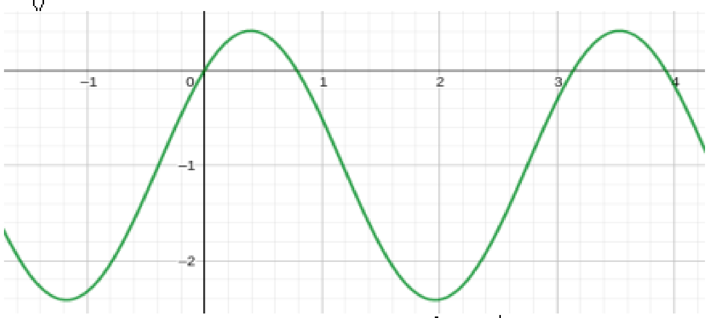
$$f' = 0 \longrightarrow 1 - \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha = 0 \qquad \operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -1 \pm \sqrt{2} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} - 1 \qquad \alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}$$

in alternativa: usando formule duplicazione si trova

$$f(\alpha) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

2 - quindi $f(\alpha)$ è una sinusoide traslata



$$\alpha_{max} = \frac{\pi}{8} + K\pi = \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) + K\pi$$

$$\alpha_{min} = \frac{5\pi}{8} + K\pi = \operatorname{arctg}(-\sqrt{2}-1) + K\pi$$

flessi per $\operatorname{tg}\alpha = 1 \pm \sqrt{2}$

3 - $$Vol_{osr} = \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2\,dx + \pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (1-x^2)\,dx =$$

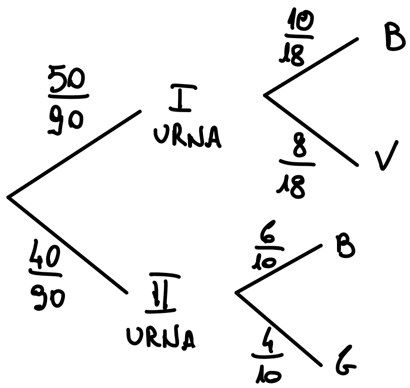
$$= \pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi\,\frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

4 - $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $xy = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2x}$ $y' = \frac{-1}{2x^2}$ $y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$

$x^2 + y^2 = 1$ $y = \sqrt{1-x^2}$ $y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln(+\infty) \longrightarrow \text{diverge} \rightarrow \text{area illimitata}$$

Q1) $10\,B + 8\,V \qquad 6\,B + 4\,G$



a) $p(V) = \frac{50}{90} \cdot \frac{8}{18} = \frac{20}{81}$

b) $p(G) = \frac{40}{90} \cdot \frac{4}{10} = \frac{8}{45}$

$p(\bar{G}) = 1 - \frac{8}{45} = \frac{37}{45}$

c) $p(I|B) = \frac{p(I) \cdot p(B|I)}{p(B)} = \frac{\frac{50}{90} \cdot \frac{10}{18}}{\frac{50}{90} \cdot \frac{10}{18} + \frac{40}{90} \cdot \frac{6}{10}} = \frac{125}{233}$

Q5)

$$y' + y = x \longrightarrow y' = -y + x$$

$a(x) = -1 \qquad A(x) = \int -1\,dx = -x$

$b(x) = x$

$$y = e^{-x} \int e^{x} \cdot x\,dx$$

a parte:

$$\int e^{x} \cdot x\,dx = e^{x} \cdot x - \int e^{x}\,dx = e^{x}x - e^{x} + c$$

quindi

$$y = e^{-x} \cdot \left(e^{x}x - e^{x} + c\right)$$

$$= x - 1 + \frac{c}{e^{x}}$$

passaggio per O $\longrightarrow$ $0 = -1 + c$ $\longrightarrow$ $c = 1$

integrale particolare:

$$y = x - 1 + \frac{1}{e^{x}}$$

QUESITO 2

Determinare centro K e raggio r della circonferenza Γ, intersezione del piano $\Pi: x+y+z-4=0$ con la superficie sferica $\Sigma: x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z=0$.

La superficie sferica Σ ha centro $C(2;-2;1)$ e raggio $R=3$. La distanza di C dal piano Π è

$$d = d(C;\Pi) = \frac{|2-2+1-4|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$$

Risulta

$$r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{6}$$

La retta

$$p: \quad X = C + t\left(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}\right)$$

passante per C e perpendicolare a Π, interseca Π nel centro di Γ.

Sostituendo le coordinate $(2+t;-2+t;1+t)$ nell'equazione del piano, si ottiene

$$2+t-2+t+1+t-4=0$$

da cui

$$t=1$$

e

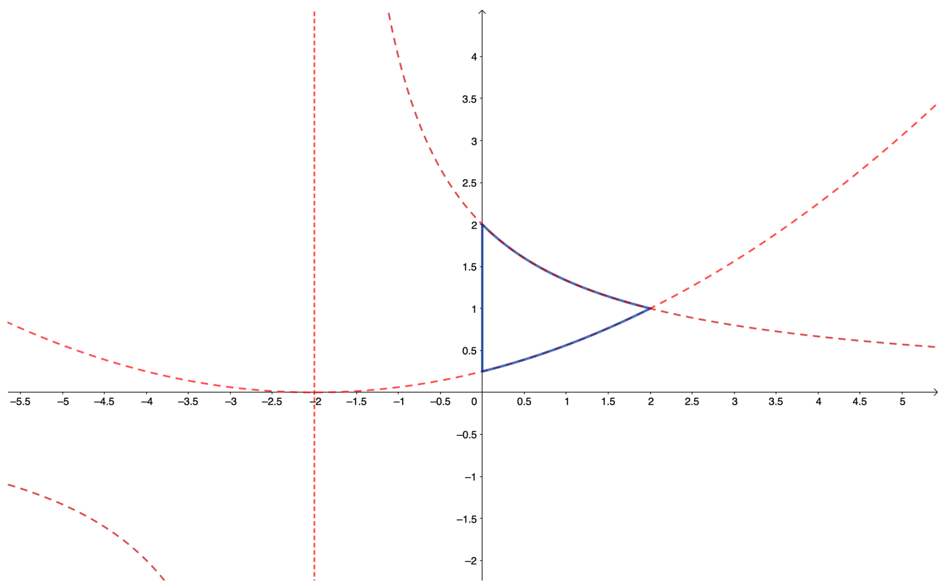
$$K=(3;-1;2)$$

QUESITO 7

Sia R la regione finita di piano delimitata dall'asse y e dai grafici delle funzioni

$$f(x)=\frac{4}{x+2} \qquad g(x)=\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$

Calcolare il volume del solido Σ, avente per base la regione R, tale che le sezioni perpendicolari all'asse x siano quadrati.



Per ogni $x \in [0; 2]$, la sezione di Σ perpendicolare all'asse x è un quadrato di lato

$$l(x) = f(x) - g(x) = \frac{4}{x+2} - \frac{1}{16}(x+2)^2$$

Perciò

$$\mathrm{Vol}(\Sigma) = \int_0^2 \left(\frac{4}{x+2} - \frac{1}{16}(x+2)^2\right)^2 dx$$

Cambiamo la variabile d'integrazione:

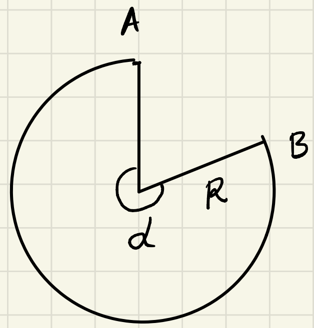
$$t = \frac{x+2}{4}$$

$$x = 4t - 2$$

$$dx = 4dt$$

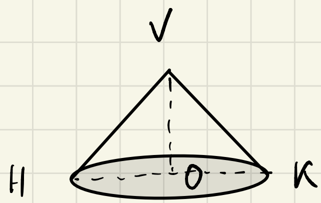
Si ricava

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\Sigma) &= \int_0^2 \left(\frac{4}{x+2} - \frac{1}{16}(x+2)^2\right)^2 dx \\
&= 4\int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{t} - t^2\right)^2 dt \\
&= 4\int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{t^2} - 2t + t^4\right) dt \\
&= 4\left[-\frac{1}{t} - t^2 + \frac{t^5}{5}\right]_{1/2}^1 \\
&= 4\left(-1 - 1 + \frac{1}{5} + 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{160}\right) \\
&= \frac{71}{40}
\end{aligned}$$



$0 < \alpha < 2\pi$

lunghezza dell'arco AB $\Longrightarrow$ $l = \alpha R$



$$OK = \frac{l}{2\pi} = \frac{\alpha R}{2\pi}$$

$$VK = R$$

$$\Longrightarrow \quad VO = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 R^2}$$

$$= \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$

$$V(\alpha) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OK^2 \cdot VO$$

$$\lambda = \frac{R^3}{24\pi^2}$$

$$= \frac{\pi}{3} \frac{\alpha^2 R^2}{4\pi^2} \cdot \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} = \lambda \cdot \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$

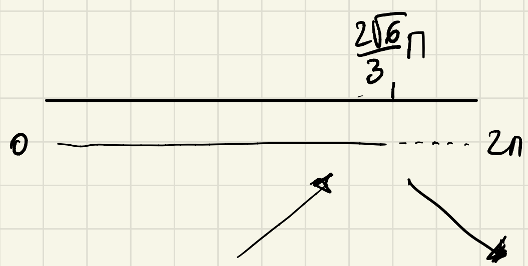
$$\frac{dV}{d\alpha} = \lambda \left[2\alpha \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} + \alpha^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}} \cdot (-2\alpha) \right]$$

$$= \lambda\alpha \left[2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}} \right]$$

$$= \lambda\alpha \cdot \frac{8\pi^2 - 2\alpha^2 - \alpha^2}{\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}} =$$

$$= \frac{\lambda\alpha}{\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}} \cdot \left(8\pi^2 - 3\alpha^2 \right)$$

$$\frac{dV}{d\alpha} > 0 \qquad \alpha < \sqrt{\frac{8\pi^2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$$



$$V_{max} \quad se \quad \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \qquad V_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{27} R^3$$

Quesito 4

è sufficiente applicare due volte il teorema di de l'Hopital

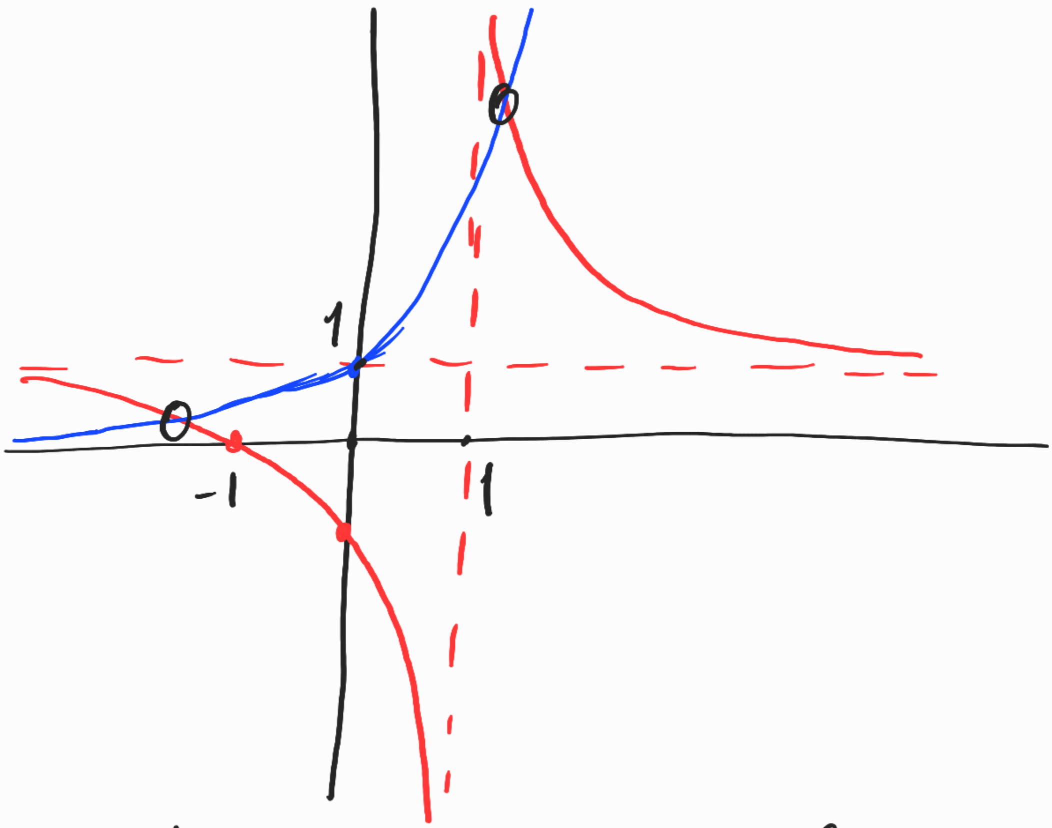
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \int_0^x e^{-2t^2}\,dt}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-2x^2}}{3x^2} \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x^2} \cdot 4x}{6x} = \frac{2}{3}$$

Quesito 6

$$(x-1)e^{x} = (x+1)e^{-x} \qquad e^{2x} = \frac{x+1}{x-1}$$

basta quindi confrontare i grafici delle due funzioni :



esistono quindi due soluzioni, una negativa $\lesssim -1$ e una positiva $\gtrsim +1$

Correzione del quesito 8

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \cos^2 \pi x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \dfrac{\ln x}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- La funzione é sempre definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$

- Analizzo la continuità per $x = 0$ e per $x = 1$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{(forma indet.)}$$

Provo a calcolare questo limite applicando il teorema de L'Hôspital
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos^2 \pi x = \cos^2 0 = 1 \qquad f(0) = 1$$

- La funzione é continua per $x = 0$

.. $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \cos^2 \pi x = \cos^2 \pi = 1 \qquad f(1) = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1 + \frac{0}{1} = 1$$

.. La funzione é continua anche per $x = 1$

... Analizzo ora la derivabilità per $x = 0$ e per $x = 1$
(per $x \neq 0$ e per $x \neq 1$ la funzione é derivabile)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x \cdot x - (e^x - 1)}{x^2} = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ 2\cos \pi x \cdot \pi \cdot (-\operatorname{sen} \pi x) = & (\text{se } 0 < x < 1) \\ \quad = -2\pi \operatorname{sen} \pi x \cos \pi x = -\pi \cdot \operatorname{sen} 2\pi x & \\ \dfrac{1/x \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Si trova che

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x(x-1)+1}{x^2} = \frac{1 \cdot (-1) + 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Applico il teorema de L'Hôspital

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x(x-1)+1}{x^2} \overset{|}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x(x-1) + e^x}{2x} = \frac{0}{0}$$ Applico di nuovo Hôsp

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x(x-1) + e^x + e^x}{2} \overset{|}{=} \frac{1(-1)+1+1}{2} = 1/2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (-\pi \cdot \operatorname{sen} 2\pi x) \overset{|}{=} -\pi \cdot 0 = 0$$

- Quindi la funzione non è derivabile per $x = 0$ e presenta un punto angoloso

- Analizzo ora la derivabilità per $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} -\pi \operatorname{sen} 2\pi x = -\pi \cdot \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

Anche il punto di ascissa $x = 1$ è un punto angoloso (punto di non derivabilità)