ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

SIMULAZIONE DELLA II PROVA A.S. 2014-15

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Nome del candidato ______________________________________	Classe ____________
Il candidato risolva uno dei due problemi; il problema da correggere è il numero ____________________	

PROBLEMA 1 : LA LAMPADA DI DUFF

Una piccola lampada di design, progettata da Simon Duff, ha la forma di un fungo (vedi figura 1); per avviare la produzione in serie della lampada è necessario descrivere la forma del suo supporto (ossia il suo profilo, escluso il paralume) mediante funzioni matematiche.

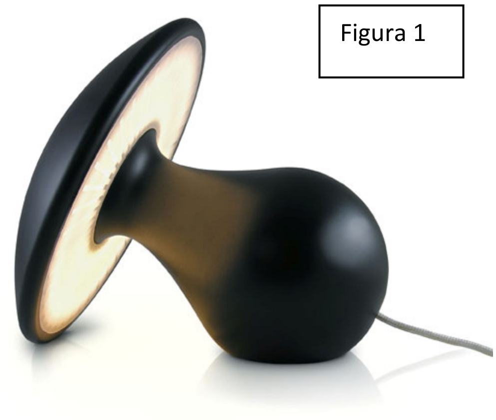
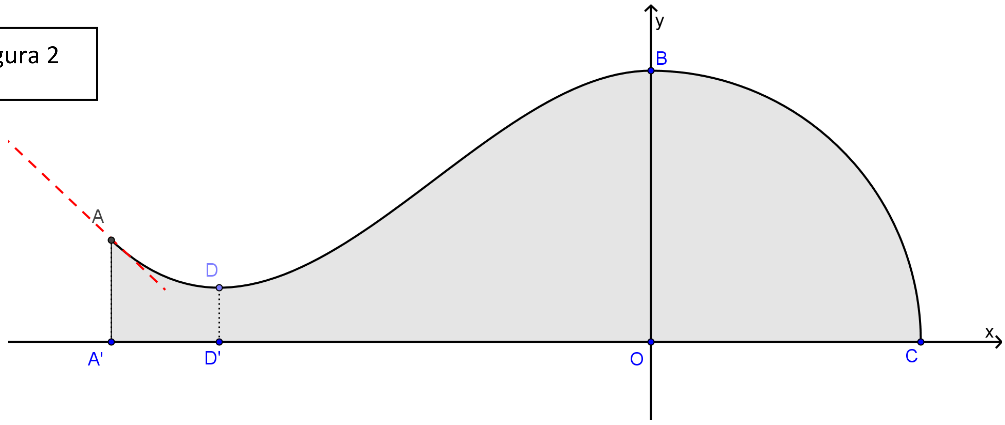


Figura 1

Il disegno del profilo della lampada, in un sistema di riferimento cartesiano, è quello riportato nella figura 2: l'arco $\widehat{AB}$ può essere descritto da una funzione $y = f(x)$ razionale intera (ossia polinomiale) di terzo grado e l'arco $\widehat{BC}$ è un arco di circonferenza centrato in O.

Figura 2



Il profilo non deve presentare alcuna spigolosità in B. Il raggio $A'A$ del cerchio in cui il supporto si salda al paralume deve avere una lunghezza di $\frac{15}{8}$ cm; la lunghezza del segmento $A'O$ è di 10 cm; la sezione più stretta contenuta nel II quadrante ha raggio $\overline{D'D}$ e si trova a 2 cm dal paralume (ossia $\overline{A'D'} = 2$ cm); la retta tangente al profilo nel punto A ha pendenza pari a $-\frac{15}{16}$.

1) *Avvalendoti delle informazioni fornite, determina l'espressione analitica della funzione $y = g(x)$ che descrive l'intero profilo della lampada da A a C e calcola il raggio $\overline{D'D}$ della sezione più stretta della lampada contenuta nel II quadrante. Giustifica i passaggi.*

A titolo di verifica è fornita l'espressione analitica della funzione che descrive il profilo tra A e B:

$y = -\frac{1}{64}x^3 - \frac{3}{16}x^2 + 5$.

Durata massima della prova: 6 ore. È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.
Non saranno consentite uscite prima delle ore 10.30; la verifica non potrà essere consegnata prima delle 12.15; dopo le ore 12,15 agli studenti che avranno consegnato la prova sarà consentita l'uscita dall'istituto;

Tra il punto A e il punto B il raggio r della sezione circolare del supporto della lampada varia con continuità tra il valore $r_A = \frac{15}{8}$ cm e il valore r_B.

2) *Calcola il valore medio $\bar{r}$ di tale raggio tra il punto A e il punto B, esprimendolo anche in forma approssimata ai millimetri.*

Il solido che costituisce il supporto della lampada si ottiene facendo ruotare il profilo già discusso attorno all'asse delle x; d'altra parte, affinché la lampada possa essere appoggiata su un piano (come chiarito anche in figura 1), viene rimossa una porzione del solido, come indicato in figura 3 e 4, in modo tale che la base di appoggio della lampada sia un cerchio di diametro BE e di area 5π cm^2. La porzione rimossa è chiaramente un segmento sferico ad una base (ossia la parte di sfera compresa tra un piano secante e la calotta sferica che esso individua).

Figura 3

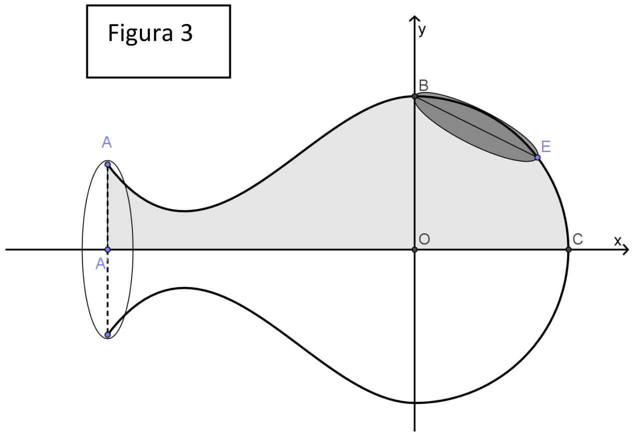
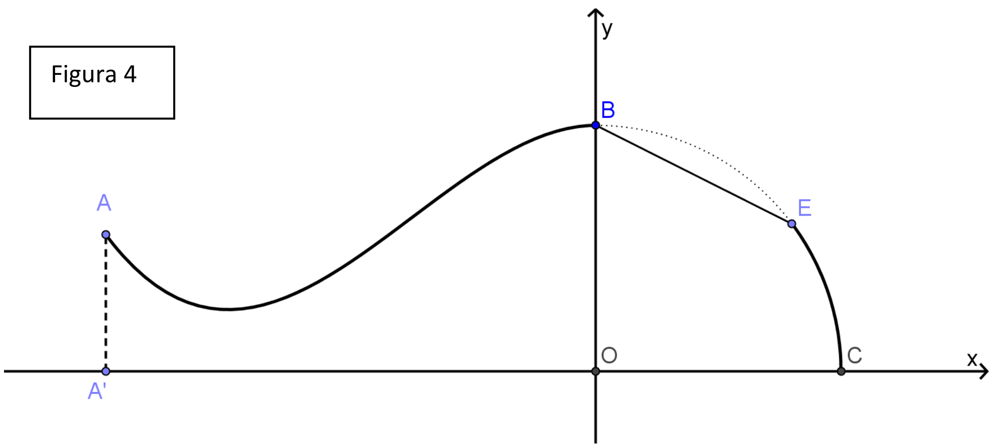


Figura 4



3) *Dimostra con l'ausilio del calcolo integrale che il volume di un segmento sferico ad una base è dato dalla formula $V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right)$ ove R indica il raggio della sfera e h l'altezza del segmento sferico (in accordo alla figura 5, nella quale, invece, r indica il raggio della base del segmento sferico). Spiega il procedimento seguìto.*

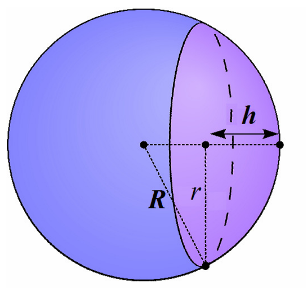


Figura 5

4) *Infine trova il volume effettivo, approssimato ai cm^3, del supporto della lampada.*

A titolo di parziale verifica è fornito un valore approssimato del volume della <u>parte</u> del solido che si ottiene dalla rotazione del profilo della lampada tra il punto A e il punto B: 285.8 cm^3.

PROBLEMA 2 : PILLOLE O PUNTURE?

La concentrazione di un farmaco nel sangue varia a seconda di come esso venga somministrato, ad esempio **per via endovenosa** o **per via orale**.

Prendiamo in considerazione la concentrazione (misurata in mg/L) del farmaco *BZT* nel sangue al passare nel tempo t (misurato in ore, con $t \geq 0$); indichiamo con:

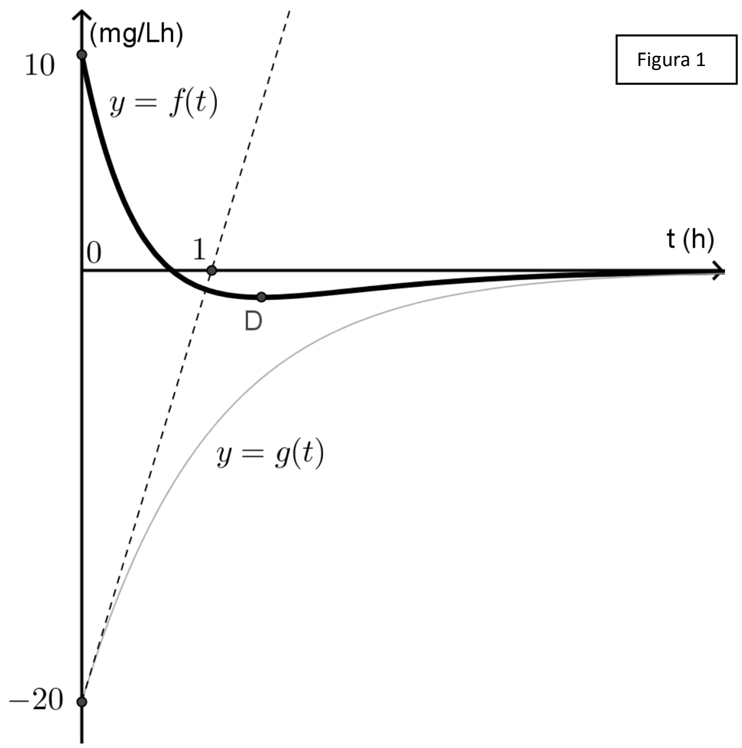
- $E = E(t)$ la concentrazione nel caso di somministrazione per **via endovenosa**,
- $R = R(t)$ la concentrazione nel caso di somministrazione per **via orale**.

Nel caso della somministrazione per **via endovenosa**, la concentrazione è *massima* nel momento stesso ($t = 0$) in cui il farmaco viene assunto (indichiamo tale massimo con $E_{\max}$), dato che viene saltata la fase dell'assorbimento in quanto il farmaco viene immesso direttamente nel circolo sistemico. Successivamente la concentrazione *diminuisce* (l'organismo inizia ad eliminare il farmaco).

Nel caso della somministrazione per **via orale**, la concentrazione è *nulla* nell'istante ($t = 0$) in cui il farmaco viene assunto, visto che deve essere assorbito dall'organismo (l'assorbimento è la prima fase del viaggio di un farmaco all'interno del nostro organismo e consiste nel passaggio del medicinale dal sito di somministrazione al circolo sanguigno). Poi essa *cresce* fino a raggiungere ad un certo istante $t_{\max}$ il suo valore massimo $R_{\max}$. Successivamente essa comincia a *decrescere*, mano a mano che l'organismo elimina il farmaco.

Nel séguito vengono presentati i grafici di due funzioni $y = f(t)$ (in nero, con tratto più spesso) e $y = g(t)$ (in grigio con tratto sottile) che rappresentano (espressa in $\frac{\text{mg}}{\text{L} \cdot \text{h}}$) **la rapidità di variazione della concentrazione** nel tempo del farmaco nel sangue per entrambi i tipi di somministrazione.

- $f(t) = A\left(2e^{\alpha t} - e^{\beta t}\right)$
- $g(t) = B\ e^{\beta t}$



1) *Motivando esaurientemente la risposta, stabilisci qual è il grafico della rapidità di variazione della concentrazione del farmaco somministrato per via orale e quale è la rapidità di variazione della concentrazione del farmaco somministrato per via endovenosa e quindi, avvalendoti delle informazioni indicate in figura (tra le quali abbiamo anche le seguenti: la retta disegnata con linea tratteggiata è tangente al grafico di* g*, il punto* $D\left(2\ln 2;-\frac{5}{4}\right)$ *appartiene al grafico di* f *), determina i valori (esatti) delle costanti* A, B, α, β.

2) *Sapendo che per il farmaco BZT la concentrazione iniziale nel caso di somministrazione per via endovenosa è 20 mg/L,*

- *deduci le espressioni analitiche delle funzioni con* $E = E(t)$ *(concentrazione nel caso di somministrazione per via endovenosa) e con* $R = R(t)$ *(concentrazione nel caso di somministrazione per via orale) e rappresentane i due grafici;*
- *determina l'istante di tempo* $t_{\max}$ *(approssimato ai minuti) in cui viene raggiunta la massima concentrazione* $R_{\max}$ *a séguito della somministrazione del farmaco per via orale e il valore di tale concentrazione massima;*
- *in entrambi in casi calcola* $(\Delta t)_{\text{dimezzamento}}$ *(approssimato ai minuti), ossia quanto tempo impiega la concentrazione del farmaco, a partire dall'istante in cui la massima concentrazione viene raggiunta, a ridursi alla metà di tale massimo.*

Attraverso la somministrazione orale, soltanto una parte del farmaco arriva all'assorbimento e al sito d'azione. La **biodisponibilità** è un parametro mediante il quale si misura la frazione di farmaco assorbita attraverso somministrazione non endovenosa rispetto a quella della corrispondente somministrazione endovenosa.

Dal punto di vista matematico, la biodisponibilità δ è data dal rapporto $\delta = \dfrac{\int_0^{+\infty} R(t)\, dt}{\int_0^{+\infty} E(t)\, dt}$ espresso in percentuale.

3) *Calcola la biodisponibilità del farmaco BZT assunto per via orale utilizzando le espressioni analitiche delle funzioni con* $E = E(t)$ *e* $R = R(t)$ *trovate in precedenza.*

Un'azienda produce il farmaco BZT in compresse. In ciascuna compressa la quantità di principio attivo è una variabile aleatoria X, i cui valori sono espressi in milligrammi, che segue una distribuzione normale di valor medio μ = 4.00 mg e scarto quadratico medio σ = 0.25 mg. Il valore medio coincide anche il valore nominale dichiarato dall'azienda. La massima tolleranza consentita rispetto al valore nominale è del 15% in più (in caso contrario aumentano notevolmente i rischi di tossicità) e del 20% in meno (in caso contrario il farmaco non riuscirebbe a raggiungere, dopo la somministrazione, una concentrazione tale da renderlo efficace). Tutte le compresse vengono controllate dopo essere state prodotte.

4) *Dato un lotto di 150 000 compresse di BZT, calcola, approssimando alle centinaia, quante di esse verranno scartate in accordo ai limiti di tolleranza succitati.*
Calcola inoltre quante compresse N *occorre controllare affinché la probabilità che almeno una vada scartata sia superiore al 95%.*

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

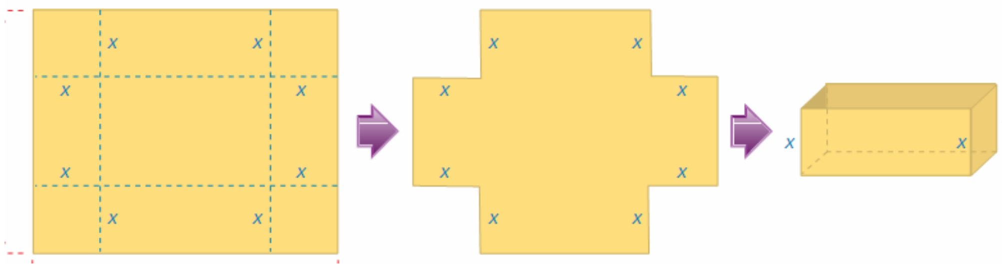
SIMULAZIONE DELLA II PROVA A.S. 2014-15

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Nome del candidato ______________________			Classe ____________			
Il candidato risolva cinque dei dieci quesiti; i quesiti da correggere sono i numeri	___	___	___	___	___	

1. Hai a disposizione un foglio di cartone di forma rettangolare di dimensioni a e $2a$, con il quale vuoi costruire una scatola a base rettangolare aperta al di sopra, tagliando via dai vertici del foglio quattro quadrati uguali. Determina quanto deve valere la misura x del lato di ciascun quadrato eliminato in modo da ottenere la scatola di volume massimo. Determina l'area del foglio (prima del taglio), approssimata ai cm^2, dal quale si ottiene una scatola di volume massimo pari a 10 L.



2. Dimostra, motivando i passaggi esaurientemente, che la funzione $y = f(x) = \frac{5}{2}x - x^3 + \ln(x+1) + 3$ è iniettiva su $I =]-1;1[$ (e pertanto invertibile se considerata come funzione tra I e $f(I)$); detta $x = g(y)$ la funzione inversa di tale restrizione di f, calcola $g'(3)$.

3. Considera il solido W descritto nel séguito: la base di W è la regione $\mathfrak{D}$ del piano xOy delimitata della parabola di equazione $x = y^2$ e dalla retta di equazione $x = 4$; le sezioni di W con piani perpendicolari all'asse x in un punto a distanza x dall'asse y sono triangoli isosceli la cui altezza misura $h(x) = 2x$. Disegna la regione $\mathfrak{D}$ e calcola il volume V del solido W.

4. Il centralino A riceve in media 2 chiamate al minuto; il centralino B ne riceve in media 4 al minuto; i due centralini funzionano in modo indipendente fra loro e per ciascun centralino il numero di chiamate, che indichiamo con X_A e X_B, che ricevono in un minuto è una variabile aleatoria che segue una distribuzione di Poisson. Calcola la probabilità che, in un minuto,

   a) il centralino A riceva almeno una telefonata;

   b) il centralino A riceva un numero di telefonate compreso tra 1 e 3;

   c) i due centralini ricevano nel complesso non più di 3 telefonate (se chiami X_{TOT} la variabile aleatoria che conta il numero di chiamate che in un minuto complessivamente arrivano ai due centralini, potrai dire che essa segue una distribuzione... di parametro...).

5. Sia $N = N(t)$ il numero di batteri di una data colonia dopo t ore (con $t \geq 0$) dall'inizio dell'osservazione; il rapporto $R(t)$ tra la velocità di crescita del numero di batteri e il numero di batteri non è costante, ma decresce nel tempo; esso vale: $R(t) = \dfrac{t}{t^2+4}$, espresso in h^{-1}.

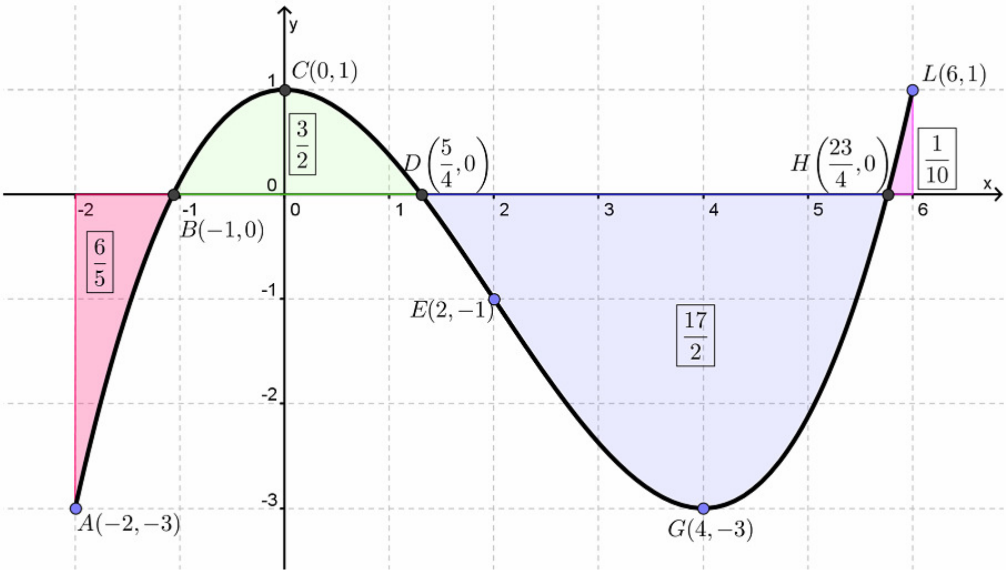
   a) Scrivi e risolvi l'equazione differenziale che deve soddisfare la funzione $N = N(t)$.

   b) Supponendo che all'inizio dell'osservazione la colonia fosse costituita da 1000 batteri, dopo aver determina la soluzione particolare dell'equazione differenziale che costituisce il modello del problema, calcola dopo quanto tempo il numero di batteri sarà il triplo di quello iniziale. Esprimi il risultato in ore e minuti, arrotondato ai minuti.

6. Osserva il grafico di $y = f(x)$ funzione continua e derivabile, definita per $-2 \leq x \leq 6$ e considera la funzione integrale $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ anch'essa definita per $-2 \leq x \leq 6$.

   Si conoscono le coordinate dei seguenti punti del grafico di f: $A(-2;-3)$, $B(-1;0)$ (zero di f), $C(0;1)$ (punto di massimo), $D\left(\dfrac{5}{4};0\right)$ (zero di f), $E(2;-1)$ (unico punto di flesso), $G(4;-3)$ (punto di minimo), $H\left(\dfrac{23}{4};0\right)$ (zero di f), $L(6;1)$. Sono note inoltre le aree individuate da f con l'asse *x* tra un estremo e uno zero o tra due zeri (rispettivamente $\dfrac{6}{5}$, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{17}{2}$, $\dfrac{1}{10}$).

   Calcola il maggior numero possibile di valori esatti di F e rappresenta il grafico di F, stabilendo monotonia e punti estremanti relativi (entrambe le coordinate), concavità e (ascisse dei) punti di flesso (non limitarti ad utilizzare queste informazioni per produrre il grafico di F, ma scrivile esplicitamente).



7. Nello spazio dotato di un riferimento cartesiano ortogonale e monometrico considera i punti $A(1;1;1)$, $B(2;0;1)$, $C(0;-2;-1)$ e il punto $D(4;2;-1)$.

   a. Mostra che il triangolo ABC è rettangolo in B.
   b. Determina l'equazione cartesiana del piano α passante per A,B,C.
   c. Calcola la distanza di D dal piano α e sfrutta questo risultato per trovare il volume del tetraedro di vertici $ABCD$.

8. Considera la funzione $f(x)=\begin{cases} a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)+b & \text{se} \quad x<1 \\ x-\int_1^x e^{t^3}\,dt & \text{se} \quad x\geq 1 \end{cases}$; determina per quali valori dei parametri reali a,b la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $[0;3]$.

9. Una malattia colpisce in media una persona su cento. Esiste un test diagnostico che fornisce esito positivo nel 98% dei casi di persone affette dalla malattia ma anche in 5 casi su mille di persone invece sane.
   Una persona si sottopone al test e questo risulta positivo. Calcola la probabilità che la persona sia realmente affetta dalla malattia.

10. Un punto materiale $P(x,y)$ si muove nel piano dotato di un riferimento cartesiano e le coordinate in funzione del tempo (con $t\geq 0$) sono $\begin{cases} x=e^t \\ y=e^t-2t \end{cases}$ con x e y misurate in metri e t in secondi.
    a. Determina l'equazione della traiettoria e tracciala nel piano cartesiano.
    b. Determina gli istanti di tempo, se esistono, per i quali il modulo della velocità del punto materiale vale 2 m/s.