Liceo scientifico statale "G. B. Quadri"

LICEO QUADRI

ESAME DI STATO 2022

COMMISSIONI SC/SA – SEZ. XXX

SECONDA PROVA SCRITTA – MATEMATICA – 23/06/2022

TRACCIA 1

Il candidato ______________________________ *svolga, a scelta,* uno *dei due problemi e*
(COGNOME E NOME – IN STAMPATELLO)

quattro *degli otto quesiti.*

PROBLEMA SCELTO	PROBLEMA 1 ☐				PROBLEMA 2 ☐			
QUESITI SCELTI	Q1 ☐	Q2 ☐	Q1 ☐	Q2 ☐	Q1 ☐	Q2 ☐	Q1 ☐	Q2 ☐

(METTERE UNA CROCETTA NEGLI SPAZI APPROPRIATI)

- NON SCRIVERE A MATITA
- NON USARE LA CANCELLINA, NÉ IL BIANCHETTO
- NON SCRIVERE, NÉ DISEGNARE, USANDO IL COLORE ROSSO

SPAZIO RISERVATO AI DOCENTI

NUMERO DI FOGLI UTILIZZATI ______________________________

CONSEGNATO ALLE ORE ______________________________

PROBLEMA 1

In un piano cartesiano ortogonale Oxy, si considerino le parabole C_1, C_2 di equazione rispettivamente:

$$C_1: y - x^2 = 0 \; e \; C_2: y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$$

a) Si verifichi che le due curve sono tangenti in $A(1; 1)$ e che hanno in comune un ulteriore punto B.

b) Detta R la regione finita di piano delimitata dalle due parabole, si conduca per A una retta r che incontri l'asse delle ordinate in S e il contorno di R, oltre che in A, in un ulteriore punto P. Si determini la funzione

$$f(m) = \frac{AP}{AS}$$

ove m è il coefficiente angolare della retta r.

c) Si studi la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8-4x}{x^2} & \text{per } x \in]-\infty; -2[\\ 2 - x & \text{per } x \in [-2; 2] \\ \dfrac{4x-8}{x^2} & \text{per } x \in]2; +\infty[\end{cases}$$

(che, a parte la sostituzione della variabile, è la soluzione del punto precedente), determinandone in particolare il massimo assoluto e gli eventuali massimi relativi. Si tracci il grafico della funzione.

d) Si consideri la regione Δ, nel semipiano $x \geq 2$, delimitata dal grafico di f e dall'asse x. Si calcoli il volume del solido Σ che si genera con una rotazione completa di Δ intorno all'asse x, verificando che, pur essendo illimitato, Σ possiede volume finito.

PROBLEMA 2

Sia data la famiglia di funzioni $f(x) = axe^{-bx^2}$, con $a, b \in R$.

a) Determinare a e b in modo che $f(x)$ abbia un massimo relativo per $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ e che il suo valore medio nell'intervallo $[0; 1]$ sia $\frac{e^3-1}{3e^3}$.

b) Avendo dimostrato che i valori di a e b di cui al punto precedente sono $a = 2$ e $b = 3$, sia $f(x)$ la funzione corrispondente a tali valori. Studiare la funzione fino alla derivata seconda.

c) Ricavare, se esiste, il limite

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^k f(x)\,dx$$

e dare un significato geometrico allo stesso.

d) Sia P un punto del grafico di $f(x)$ appartenente al primo quadrante e siano Q e R le sue proiezioni sugli assi x e y, rispettivamente. Ricavare P in modo che sia massima l'area del rettangolo $PQOR$.

QUESITO 1

Alfonsina e Bruno giocano lanciando un dado (regolare). Ogni volta che esce un numero inferiore a 3 si assegnano due punti ad Alfonsina, se, invece, esce un numero maggiore di 2 si assegna un punto a Bruno. Vince il primo che totalizza 6 punti.

a) Qual è la probabilità che entrambi realizzino almeno 1 punto nel corso della partita?

b) Qual è la probabilità che, in un certo momento della partita, Alfonsina conduca per 4 a 3?

QUESITO 2

Determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica avente centro nel punto $C(0;1;1)$ e raggio pari alla distanza fra il punto C e la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 4 \\ z = 4 + t \end{cases}$$

QUESITO 3

Sia ABC un triangolo equilatero, di lato a. Fra i rettangoli inscritti nel triangolo, aventi un lato sulla base AB, determinare: a) quello di area massima; b) quello di diagonale minima.

QUESITO 4

Dimostrare che ogni soluzione dell'equazione differenziale $x^2 y' + 2xy = 1$, nell'intervallo $x > 0$, tende a zero per x tendente a $+\infty$ e determinare la soluzione y che soddisfa la condizione $y(2) = 2y(1)$.

QUESITO 5

a) Dimostrare che la funzione

$$F(x) = \int_2^x \frac{1 + \ln t}{t^2} dt$$

è invertibile nell'intervallo $[\frac{1}{e}; +\infty[$.

b) Detta G l'inversa di F, risolvere l'equazione $F(x) = 0$ e calcolare $G'(0)$.

QUESITO 6

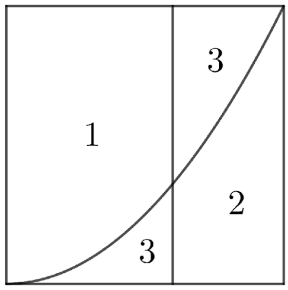
Verificare se esiste un valore del parametro a in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a \ln(ex^2 - x^2 + 1) & \text{se } x \leq 0 \\ (2a + 1)e^{1-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1; 1]$.

QUESITO 7

Nel piano cartesiano Oxy, si considerino: il quadrato avente come diagonale il segmento di estremi $A(1;0)$ e $B(0;1)$, la parabola di equazione $y = x^2$ e una generica retta verticale, di equazione $x = t$, con $t \in]0;1[$.



La figura così ottenuta viene utilizzata come bersaglio per il gioco delle freccette, con i punteggi descritti nella rappresentazione grafica soprastante. Determinare il valore di t che rende minima la probabilità di realizzare un lancio da tre punti e ricavare, per tale valore del parametro t, la distribuzione di probabilità relativa ad un lancio.

QUESITO 8

Considerata la regione R, nel primo quadrante, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola γ di equazione $y = 6 - x^2$, calcolare:

a) il volume del solido S_1 generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse x;

b) il volume del solido S_2 generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y;

c) il volume del solido S_3 generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.