PROBLEMA 1

In un piano cartesiano ortogonale Oxy si considerino le parabole $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ di equazione rispettivamente:

$$\mathcal{C}_1:\ y - x^2 = 0 \qquad e \qquad \mathcal{C}_2:\ y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$$

a) *Si verifichi che le due curve sono tangenti in $A(1,1)$ e che hanno in comune un ulteriore punto B.*

b) *Detta R la regione finita di piano delimitata dalle due parabole, si conduca per A una retta r che incontra l'asse delle ordinate in S e il contorno di R, oltre che in A, in un ulteriore punto P. Si consideri la funzione*

$$f(m) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AS}}$$

essendo m il coefficiente angolare della retta r.

c) *Si studi la funzione $f(m)$ determinandone in particolare il massimo assoluto e gli eventuali massimi relativi.*

d) *Considerata la regione del semipiano $x \geq 2$ delimitata dal grafico di f e dall'asse x, si calcoli il volume che si genera con una sua rotazione completa intorno all'asse x, verificando che, pur essendo illimitata, possiede volume finito.*

Il grafico delle due parabole si traccia immediatamente:

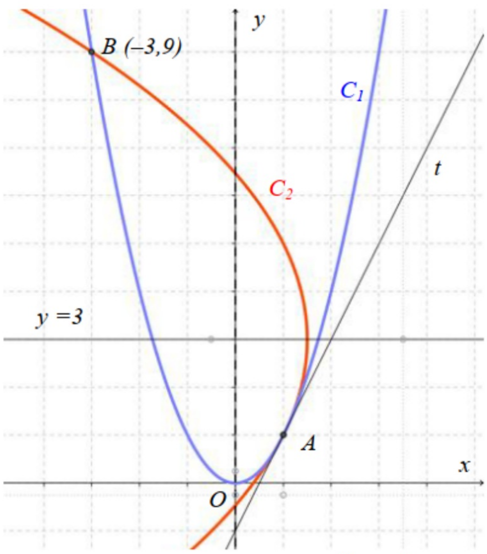


figura1

È banale verificare che $(1,1)$ *è comune alle due parabole; un po' meno che è punto di tangenza (io l'ho fatto calcolando la pendenza della tangente in* $x = 1$ *della simmetrica di* C_2 *rispetto alla bisettrice* $y = x$ *e poi prendendo il reciproco).*

Mettendo a sistema le due equazioni, si trova poi anche il secondo punto comune: viene facile se si sfrutta il fatto che $x = 1$ *è soluzione due volte.*

Si noti che:

$m(t) = 2 \quad e \quad m(AB) = -2$

Passando alla seconda parte:

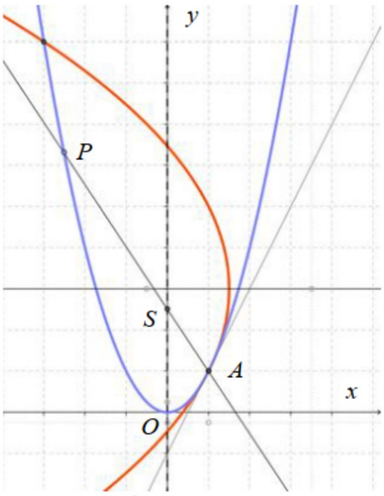


figura 2

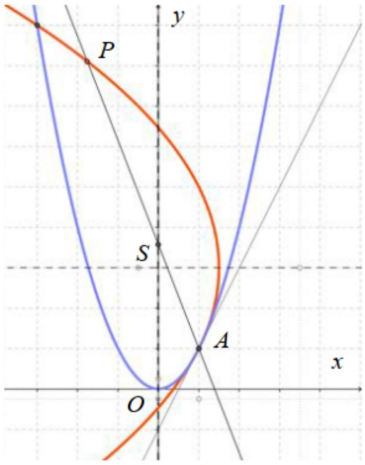


figura 3

È evidente che a seconda dell'arco di parabola intercettato, le coordinate di P si otterranno da sistemi diversi; ciò porterà, poi, a una funzione definita a tratti.

A grandi linee (il secondo caso è un pochino più laborioso):

$retta\ r\ per\ A\colon\ y-1=m(x-1)$

$r\cap C_1\colon \quad \begin{cases} y=mx-m+1 \\ y=x^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad P=(m-1,(m-1)^2)\ \wedge\ -2\le m\le 2$

$r\cap C_2\colon \quad \begin{cases} y=mx-m+1 \\ y^2+8x-6y-3=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad P=\left(\frac{m^2+4m-8}{m^2},\frac{5m-8}{m}\right)\ \wedge (m<-2\vee m>2)$

Per il calcolo della funzione richiesta bisogna ora distinguere:

- *se* $-2\le m\le 2$:
  $\overline{AP}=|m-1-1|\cdot\sqrt{1+m^2}=|m-2|\cdot\sqrt{1+m^2}=(2-m)\cdot\sqrt{1+m^2}$

- *se* $m<-2\vee m>2$:
  $\overline{AP}=\left|\frac{m^2+4m-8}{m^2}-1\right|\cdot\sqrt{1+m^2}=\left|\frac{4m-8}{m^2}\right|\cdot\sqrt{1+m^2}=4\left|\frac{m-2}{m^2}\right|\cdot\sqrt{1+m^2}$

Da $S=(0,-m+1)$ *si ricava poi immediatamente* $\overline{AS}=\sqrt{1+m^2}$.
Pertanto:

$$f(m)=\begin{cases} 2-m & se \quad -2\le m\le 2 \\ 4\left|\frac{m-2}{m^2}\right| & se \quad m<-2\vee m>2 \end{cases}$$

In sostanza, detta $g(m)=\frac{4(m-2)}{m^2}$, *possiamo riscrivere la nostra funzione così:*

$$f(m)=\begin{cases}-g(m) & se \quad m<-2\\ 2-m & se \quad -2\le m\le 2\\ g(m) & se \quad m>2\end{cases}$$

Per studiare f; sarà dunque sufficiente studiare g, anche ignorando le limitazioni imposte dal problema, e solo in seconda battuta considerare le necessarie restrizioni e simmetrie.

DOMINIO $\mathbb{R}-\{0\}$

SEGNO $g>0 \ se \ \ m>2$

FRONTIERE

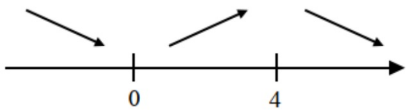
$$\lim_{m\to-\infty}\frac{4(m-2)}{m^2}=\lim_{m\to-\infty}\frac{4m(1-2/m)}{m^2}=0^-$$
$$\lim_{m\to+\infty}\frac{4(m-2)}{m^2}=\lim_{m\to+\infty}\frac{4m(1-2/m)}{m^2}=0^+$$

INT. MONOTONIA

$$g'=4\left(\frac{m^2-2m(m-2)}{m^4}\right)=\dots=4\left(\frac{4-m}{m^3}\right)$$

$g'>0$: $\begin{matrix} N>0 \ se \ \ m<4\\ D>0 \ se \ \ m>0\end{matrix}$

Dunque $g'>0 \quad se \ \ 0<m<4$



max rel: $\begin{cases} m=4\\ g(4)=\frac{1}{2}\end{cases}$

Come si può notare non siamo andati ad indagare il comportamento di g vicino a 0 (perché non interesserà); invece è utile sapere come la funzione "attacca" nei punti $m=-2$ *e* $m=2$*:*

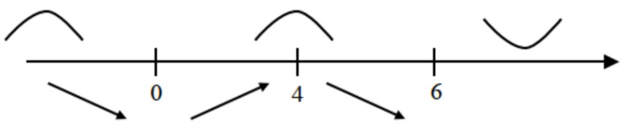
$g(-2)=-4 \qquad g'(-2)=-3/4$

$g(2)=0 \qquad g'(2)=1$

CONVESSITÀ

$$g''=4\left(\frac{-m^3-3m^2(4-m)}{m^6}\right)=\dots=8\left(\frac{m-6}{m^4}\right)$$

Facilissimamente: $g''>0 \quad se \ \ m>6$



flesso: $\begin{cases} m=6\\ g(4)=\frac{4}{9}\end{cases}$ *tangente inflessionale:* $g'(6)=-\frac{1}{27}$

I grafici sono a pagina seguente:

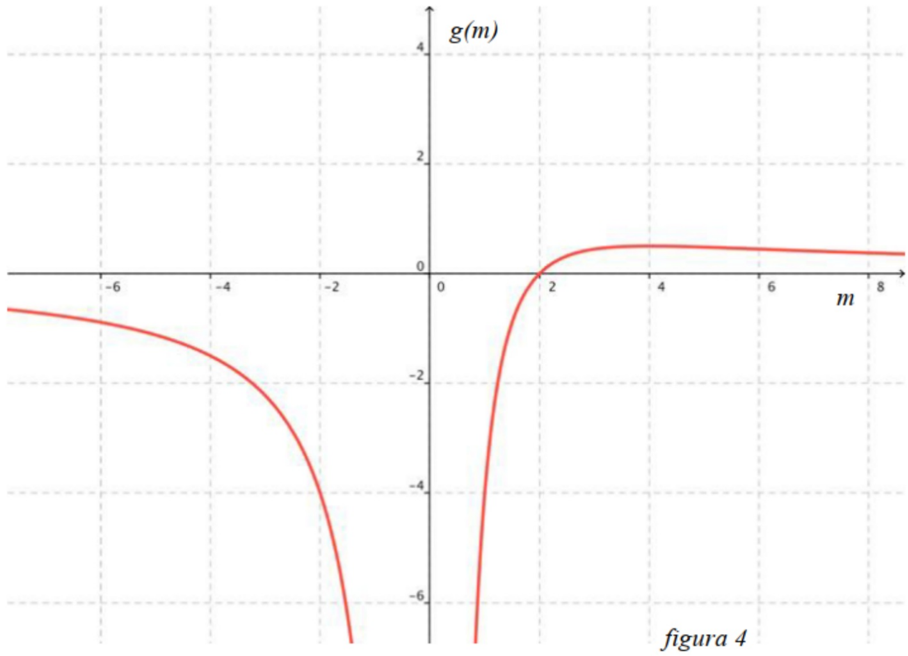


figura 4

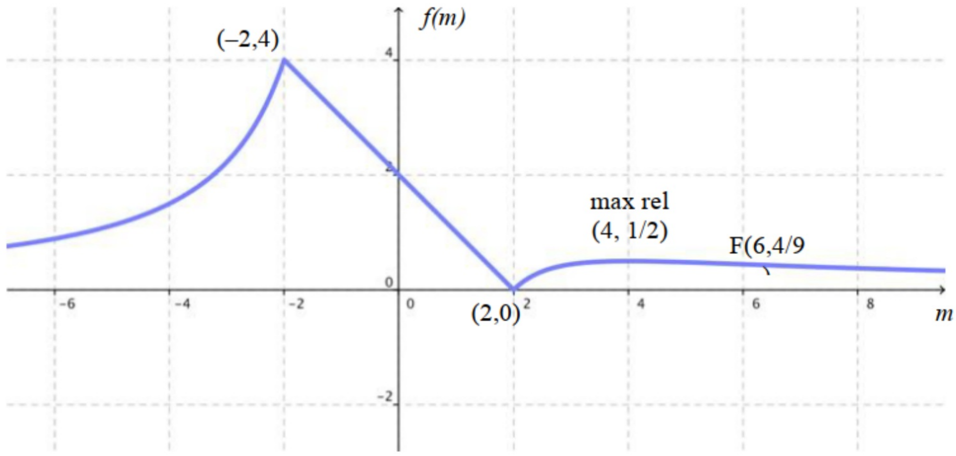


figura 5

Come si può notare, MAX ASSOLUTO = 4 e MIN. ASSOLUTO = 0.

Quanto all'ultima parte del quesito è un banale calcolo di integrale definito (seppure improprio).

Si dovrebbe ottenere

$$V = \frac{8}{3}\pi$$

Problema 2

a) $f'(x) = a\,e^{-bx^2}(1-2bx^2)$

deve essere $a \neq 0$ quindi

$f'\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=0$ implica $1-2b\cdot\frac{1}{6}=0$

cioè $b=3$ e $f(x)=ax\,e^{-3x^2}$

valore medio $\frac{e^3-1}{3e^3} = \int_0^1 ax\,e^{-3x^2}dx =$

$= -\frac{1}{6}a\left[e^{-3x^2}\right]_0^1 = a\,\frac{e^3-1}{6e^3} = \frac{e^3-1}{3e^3}$

cioè $a=2$

e $f(x) = 2x\,e^{-3x^2}$

b) $f(x)$ è evidentemente dispari

con dominio $= \mathbb{R}$, $f(0)=0$

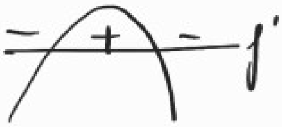
$f(x)>0$ per $x>0$ e $f(x)<0$ per $x<0$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ e $y=0$ è

asintoto orizzontale

$$f'(x) = 2e^{-3x^2}(1-6x^2)$$

$f'(x) = 0$ per $x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$



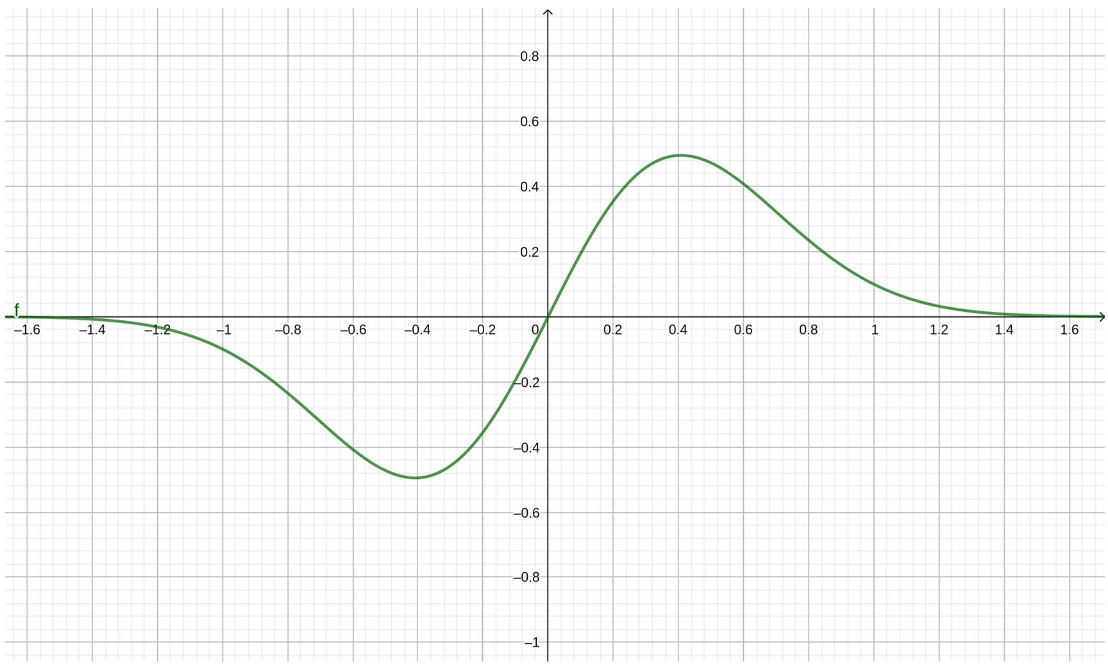
e $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y = \frac{-2}{\sqrt{6e}}$ è minimo relativo

$x = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{6e}}$ è massimo relativo

$$f''(x) = 36\, e^{-3x^2}\, x\,(2x^2-1)$$

$f''(x) = 0 \longrightarrow$ 3 flessi

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = 0$	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$y = -\sqrt{\frac{2}{e^3}}$	$y = 0$	$y = \sqrt{\frac{2}{e^3}}$



c) $\int_0^K f(x)\,dx = \int_0^K 2x\, e^{-3x^2}\,dx =$

$= -\frac{1}{3}\int_0^K (-6x)\, e^{-3x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left[e^{-3x^2}\right]_0^K =$

$= \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3K^2}\right)$

quindi $\lim_{K \to +\infty} \int_0^K f(x)\,dx = \frac{1}{3}$ e tale valore rappresenta l'area della regione sottesa dalla funzione con il semiasse positivo delle x.

d) $OQ = x \qquad OR = f(x)$

$S(x) = x \cdot f(x) = 2x^2 e^{-3x^2}$

$S'(x) = 4\, e^{-3x^2}\left(x - 3x^3\right)$

$S'(x) = 0 \longrightarrow \quad x = 0$ minimo

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ massimi

$S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3e}$ è area massima

QUESITO 1

a) $1 - P(\text{A FA ZERO PUNTI}) - P(\text{B FA ZERO PUNTI}) - P(\text{A e B FANNO ZERO PUNTI}) =$

$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 0 = \frac{638}{729} \approx 87{,}5\,\%$

b) 2A e 3B : $P = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243} \approx 32{,}9\,\%$

QUESITO 2

) $C = (0; 1; 1)$ retta s: $\begin{cases} x = -1-2k \\ y = 4 \\ z = 4+k \end{cases}$

In generale, l'eq. della superficie sferica di centro $C = (x_0; y_0; z_0)$ e raggio r si ottiene sviluppando l'equazione $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$

Devo calcolarmi il valore del raggio:

- Considero il piano α passante per C e perpendicolare alla retta s;
- questo piano interseca la retta s in un punto H
- la lunghezza del segmento $\overline{CH}$ rappresenta la distanza cercata (quindi il valore del raggio), poiché $CH \perp s$.

Il vettore direzione di s è $\vec{v}(-2; 0; 1)$

α: $ax + by + cz + d = 0$, con $(a; b; c) = (-2; 0; 1)$

e "d" che lo determino imponendo il passaggio per C

$-2x + z + d = 0$ $\quad C \in \alpha \iff 0 + 0 + 1 + d = 0$

$\iff d = -1$

quindi $\alpha: -2x + z - 1 = 0$

Sia ora $H = \alpha \cap s$ $\quad \begin{cases} x = -1-2k \\ y = 4 \\ z = 4+k \\ -2x + z - 1 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \times \\ \times \\ \times \\ -2(-1-2k) + 4 + k - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \times \\ \times \\ \times \\ 2 + 4k + 3 + k = 0 \end{cases}$

dall'ultima equazione si ricava $k = -1$, pertanto le coordinate del punto H sono

$\begin{cases} x = -1 - 2(-1) = -1 + 2 = 1 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ $\quad H = (1; 4; 3)$

$r = \overline{CH} = \sqrt{(x_H - x_C)^2 + (y_H - y_C)^2 + (z_H - z_C)^2} = \sqrt{1 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

L'eq. della sup. sferica richiesta è

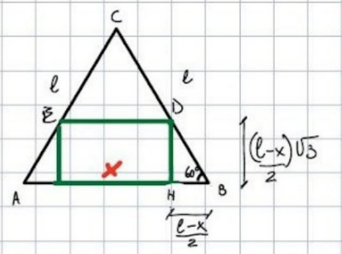
$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$

$\iff x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 14$

$\iff x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 - 14 = 0$

$\iff x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 12 = 0$

QUESITO 3



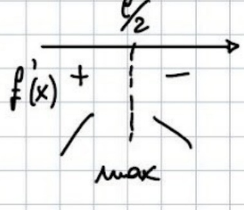
$\overline{BH} = \ell - x$

$\overline{DH} = \overline{BH}\cdot\sqrt{3} = \frac{\ell-x}{2}\cdot\sqrt{3}$

a) $A_{rett} = x\cdot\frac{\ell-x}{2}\sqrt{3}$

$f'(x) = \sqrt{3}\cdot\left[\frac{\ell-x}{2} + x\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \sqrt{3}\left(\frac{\ell}{2}-x\right)$

$f'(x)>0 \qquad \cancel{\sqrt{3}}\left(\frac{\ell}{2}-x\right)>0 \qquad x<\frac{\ell}{2}$



Area massima per $x=\frac{\ell}{2}$

b) $\overline{EH} = \sqrt{x^2+\left[\frac{\ell-x}{2}\cdot\sqrt{3}\right]^2} =$

$= \sqrt{x^2+\left(\frac{\ell-x}{2}\right)^2\cdot 3}$

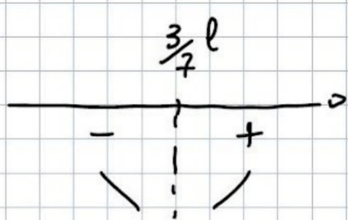
Considero solo il radicando

$f(x) = x^2 + \frac{\ell^2-2x\ell+x^2}{4}\cdot 3 =$

$= \frac{4x^2+3\ell^2-6\ell x+3x^2}{4} = \frac{7}{4}x^2 - \frac{3}{2}\ell x + \frac{3}{4}\ell^2$

$f'(x) = \frac{14}{4}x - \frac{3}{2}\ell$

$f'(x)>0 \qquad \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}\ell > 0 \quad ; \quad x > \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{7}\ell \quad ; \quad x>\frac{3}{7}\ell$



diagonale minima per $x=\frac{3}{7}\ell$

QUESITO 4

Dimostrare che ogni soluzione dell'equazione differenziale $x^2y' + 2xy = 1$ nell'intervallo $x > 0$ tende a zero per $x \to +\infty$ e determinare la soluzione y che soddisfa $y(2) = 2y(1)$.

Soluzione:

$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}$ trattasi di equazione lineare del primo ordine quindi (supponendo $x > 0$ cerco $\int \frac{2}{x} dx = 2lnx = lnx^2$ e quindi moltiplico per $e^{lnx^2} = x^2$:

$$y' \cdot x^2 + \frac{2}{x} y \cdot x^2 = 1 \rightarrow D(x^2y) = 1 \rightarrow x^2y = x + c \rightarrow y = \frac{x + c}{x^2}$$

L'integrale generale nell'intervallo $x > 0$ è quindi $y = \frac{x+c}{x^2}$ e si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+c}{x^2} = 0 \; \forall c \in \mathbb{R}$

Imponiamo ora la condizione $y(2) = 2y(1)$:

$\frac{2+c}{4} = 2\frac{1+c}{1} \rightarrow 2 + c = 8 + 8c \rightarrow 7c = -6 \rightarrow c = -\frac{6}{7}$ e si ottiene la soluzione particolare $y = \frac{x-\frac{6}{7}}{x^2}$

QUESITO 5

$F'(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2} > 0 \qquad \ln x > -1 \qquad x > \frac{1}{e}$

$G'(0) = \frac{1}{F'(2)} = \frac{4}{1 + \ln 2}$

QUESITO 6

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \ln((e-1)x^2+1), & x \leq 0 \\ (2\alpha+1)e^{1-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-e)\alpha x}{(e-1)x^2+1}, & x < 0 \\ \dfrac{(2\alpha+1)e^{1-\frac{1}{x}}}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

è di classe C[1] su tutto R se e solo se $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$; si vede abbastanza facilmente che entrambe le condizioni sono sempre verificate indipendentemente dal valore dei parametro (f è sempre continua e derivabile in 0!).

L'unico limite non immediato è $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ in cui si presenta la forma indeterminata [0/0] ma che non conviene risolvere con il teorema di De L'Hopital. Si può affrontare discutendo il confronto tra infinitesimi oppure con la sostituzione $\frac{1}{x} = t$:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{(2\alpha+1)et^2}{e^t} = (H) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2(2\alpha+1)et}{e^t} = (H) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2(2\alpha+1)e}{e^t} = 0.$$

L'unica condizione del teorema di Rolle che aiuta a determinare i parametri è $f(-1) = f(1)$, da cui si ottiene $2\alpha + 1 = \alpha$, da cui si ottiene $\alpha = -1$.

QUESITO 7

① $0 \le t \le 1$

$$S_1 = t - \int_0^t x^2\,dx = t - \frac{t^3}{3} = \frac{3t - t^3}{3}$$

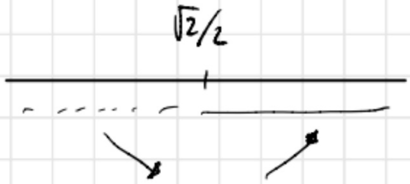
$$S_2 = \int_t^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} - \frac{t^3}{3} = \frac{1 - t^3}{3}$$

$$S_3 = 1 - \frac{3t - t^3}{3} - \frac{1 - t^3}{3} = \frac{3 - 3t + t^3 - 1 + t^3}{3}$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - t + \frac{2}{3}$$

$$p'(t) = 2t^2 - 1 > 0$$

$$t > \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Min p per $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

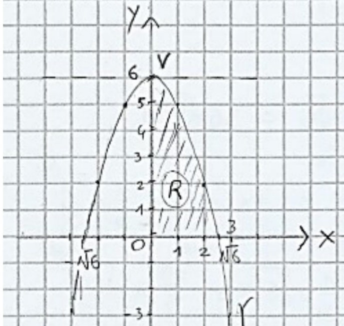
$$p_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2 - \sqrt{2}}{3} \cong 0{,}195$$

$$p_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{4 - \sqrt{2}}{12} \cong 0{,}216$$

$$p_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{12} \cong 0{,}589$$

QUESITO 8

3) $y = 6 - x^2$ [parabola con asse verticale e vertice $V = (0;6)$]



Intersezioni con l'asse x:

$0 = 6 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

$(\sqrt{6} \approx 2{,}45)$

x	$y = 6 - x^2$
0	6
± 1	5
± 2	2
± 3	- 3

La regione R è quella tratteggiata

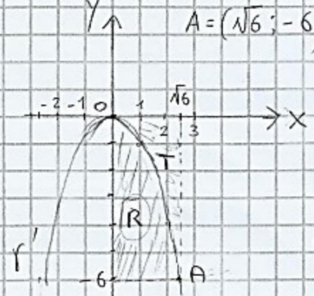
a.) Mi viene chiesto il volume del solido V_1 generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y

· Considero il primo quadrante, ossia $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ e ricavo l'espressione della funzione inversa $x^2 = 6 - y \Rightarrow x = \sqrt{6 - y}$ (escluso il caso con il segno "−")

$$V_1 = \pi \int_0^6 [f^{-1}(y)]^2\, dy = \pi \cdot \int_0^6 (6 - y)\, dy =$$

$$= \pi \cdot \int_0^6 6\, dy - \pi \int_0^6 y\, dy = \pi \cdot [6y]_0^6 - \pi \cdot \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^6 = 36\pi - \pi \cdot 18 = 18\pi$$

b. Mi viene chiesto ora il volume del solido V_2 generato dalla rotazione completa attorno alla retta orizzontale di equazione $y = 6$



$A = (\sqrt{6}; -6)$

· Traslo verticalmente la parabola γ in modo che essa abbia vertice nell'origine e trovo la parabola γ' di equazione $y = g(x) = -x^2$

· Il volume cercato è la differenza fra il volume del cilindro di raggio di base 6 e altezza $\sqrt{6}$ e il volume ottenuto facendo ruotare la regione T in figura [T è la regione compresa fra γ', l'asse x e la retta $x = \sqrt{6}$]

$$V_{cil} = A_{base} \times h = \pi \cdot |y_A|^2 \cdot x_A = 36\pi \cdot \sqrt{6} = 36\sqrt{6}\,\pi$$

$$V_T = \pi \int_0^{\sqrt{6}} g^2(x)\, dx = \pi \int_0^{\sqrt{6}} (-x^2)^2\, dx = \pi \int_0^{\sqrt{6}} x^4\, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\sqrt{6}} =$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{5}\sqrt{6}^5 = \frac{36}{5}\pi\sqrt{6}$$

Quindi $V_2 = V_{cil} - V_T = 36\pi\sqrt{6} - \frac{36}{5}\pi\sqrt{6} = \frac{144}{5}\pi\sqrt{6}$