

Simulazione di II prova - Matematica e Fisica

Classe V Sezione T

Nominativo candidato _____

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Alcune misure di laboratorio indicano che un elettrone esce da un acceleratore lineare con una velocità finale di modulo $v_f = 0,40c$, dove c indica la velocità della luce nel vuoto, e percorre una distanza $\Delta s = 12 \text{ cm}$ prima di impattare su uno schermo.

- i. Calcola in quanto tempo l'elettrone percorre la distanza Δs nel sistema di riferimento del laboratorio e la distanza $\Delta s'$ coperta dall'elettrone nel sistema di riferimento dell'elettrone.

L'elettrone, inizialmente in quiete, è stato accelerato dall'azione di un campo elettrico uniforme \vec{E} lungo la direzione dell'asse x .

- ii. A partire dalla seconda legge della dinamica relativistica $\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v})$, dove γ rappresenta il fattore lorentziano ed $m_0 = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ la massa a riposo dell'elettrone, dimostra che il modulo dell'accelerazione è espresso dalla relazione

$$a = \frac{k}{\gamma^3}, \quad (*)$$

dove $k = eE/m_0$, con $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Determina una formula semplificata per l'accelerazione quando v è molto minore di c e quando v tende a c .

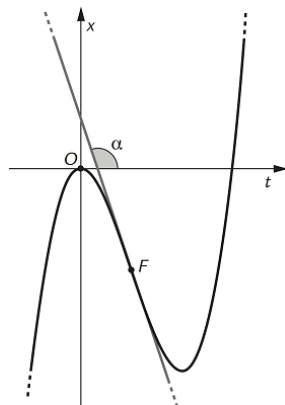
- iii. Prova che la formula (*) è un'equazione differenziale a variabili separabili la cui

soluzione è $v(t) = \frac{kt}{\sqrt{1+(kt/c)^2}}$.

- iv. Studia la funzione $y = v(t)$, con $t \in \mathbb{R}$, indipendentemente da ogni riferimento fisico. In particolare rappresenta il suo grafico qualitativo ed esplicita l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di flesso.

PROBLEMA 2

Considera la funzione $x(t)$ il cui grafico è rappresentato in figura. Esso presenta un punto di massimo relativo nell'origine O e un punto di flesso in F . La retta disegnata è la tangente al grafico della funzione in F .



- i. Sapendo che l'espressione analitica della funzione $x(t)$ è del tipo

$$x(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D,$$

dove A, B, C e D sono numeri reali opportuni, giustifica perché deve essere $A > 0$, $B < 0$ e $C = 0 = D$.

Supponendo che il punto F abbia ascissa $t = 2$ e che $\sin \alpha = 3/\sqrt{10}$, verifica che $A = 1/4$, $B = -3/2$ e $C = 0 = D$.

- ii. Considera la primitiva, definita in \mathbb{R} , della funzione $x(t)$ il cui grafico passa per l'origine. Tracciane un grafico qualitativo in un sistema di assi cartesiani tOx , mettendo in evidenza le relazioni tra il grafico della primitiva e il grafico della funzione $x(t)$ e determinando in particolare le ascisse dei punti di estremo relativo e di flesso della primitiva.
Qual è l'equazione della retta tangente al grafico della primitiva nel suo punto di flesso a tangente obliqua?

Supponi ora che la funzione $x(t)$, in cui $A = 0,25 \text{ m/s}^3$, $B = -1,50 \text{ m/s}^2$ e $C = 0 = D$, rappresenti la posizione in funzione del tempo t di un corpo di massa $2,0 \text{ kg}$, assimilabile a un punto materiale, che si muove lungo l'asse x (x misurato in metri e t in secondi), soggetto a una forza che agisce lungo l'asse x stesso.

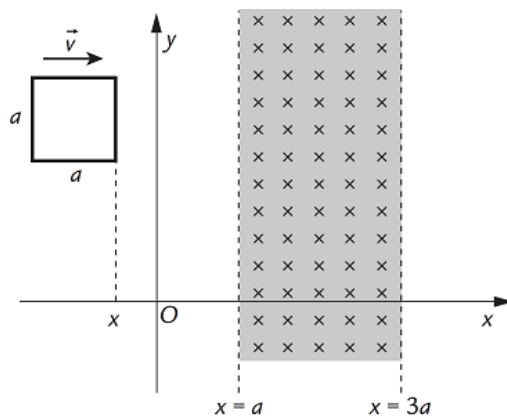
- iii. Scrivi le espressioni analitiche delle funzioni $K(t)$, $F_x(t)$ e $P(t)$ che, a ogni istante di tempo t , esprimono rispettivamente l'energia cinetica del corpo, il modulo della componente lungo l'asse x della forza a cui è soggetto e la potenza che gli viene fornita. Traccia un grafico qualitativo di queste tre funzioni, motivando l'andamento dei grafici tracciati (non è richiesta l'esatta determinazione dei punti di flesso).
- iv. Calcola il lavoro compiuto dalla forza che agisce sul corpo nell'intervallo di tempo compreso tra $t_1 = 6 \text{ s}$ e $t_2 = 10 \text{ s}$.

QUESITI di MATEMATICA

1. Considera la regione finita di piano limitata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = 2a$, con $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Per quale valore di a l'area di tale regione di piano è massima?
2. Sia π il piano di equazione $x - 3y + 2z - 3 = 0$. Scrivi l'equazione della superficie sferica \mathcal{S} di centro $C(-1; 2; -2)$ tangente al piano π e calcola le coordinate del punto di tangenza. Qual è l'equazione del piano parallelo a π (e distinto da esso) anch'esso tangente alla superficie sferica \mathcal{S} ?
3. Trova il massimo assoluto della funzione reale a valori reali $f(x) = \ln(x)/x$ nel suo dominio. Utilizzando il risultato ottenuto, dimostra che $\pi^e < e^\pi$.
4. Determina il carattere ed eventuale somma della seguente serie: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n(n-1)}$.
5. Da un'analisi di mercato è risultato che il 32% della popolazione usa un dentifricio sbiancante. Scelto a caso un gruppo di 25 persone, determinare il valore medio, la varianza e la deviazione standard della variabile casuale X : "numero di persone che usa il dentifricio sbiancante". Calcolare inoltre la probabilità che, all'interno del gruppo scelto, il numero di persone che usano detto prodotto sia compreso tra 8 e 12, estremi inclusi.

QUESITI di FISICA

6. Un muone ha massa $m = 105,6 \text{ MeV}/c^2$ e quantità di moto $\sqrt{3}mc$. Calcola la sua energia totale in MeV .
7. Un fascio luminoso di luce ultravioletta con lunghezza d'onda $\lambda = 240 \text{ nm}$ viene utilizzato per estrarre elettroni da una superficie metallica di ferro (il cui lavoro di estrazione vale $3,20 \text{ eV}$). Determina la massima energia cinetica e la corrispondente quantità di moto degli elettroni estratti dal ferro e calcola la corrispondente lunghezza d'onda di de Broglie.
8. Una spira quadrata conduttrice di lato a e resistenza R si muove con velocità costante \vec{v} verso destra, nel piano rappresentato in figura. La spira passa attraverso una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme \vec{B} , entrante nella pagina; la regione che è sede del campo magnetico corrisponde alla striscia limitata dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = 3a$. Indicata con x l'ascissa che rappresenta la posizione del lato destro della spira:
- traccia il grafico della funzione che esprime il flusso del campo magnetico attraverso l'area racchiusa dalla spira in funzione di x ;
 - traccia il grafico della fem indotta nella spira in funzione di x .



NOTE:

- Durata massima della prova: 6 ore.
- È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).
- È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.